Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS CPDE, veuillez visiter :
btscpde.fr/annales-sujets-et-corriges

Brevet de Technicien Supérieur
Groupement D1

MATHÉMATIQUES

SESSION 2025

Durée : 2 heures

SPÉCIALITÉS	COEFF
ANALYSES DE BIOLOGIE MÉDICALE	1
BIO ANALYSES ET CONTRÔLES	2
BIOTECHNOLOGIES	1
EUROPLASTICS ET COMPOSITES	1,5
BIOQUALITÉ	2

Moyens de calculs autorisés :

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (11 points)

Dans le bassin d'aération d'une station d'épuration, les matières polluantes contenues dans les eaux usées sont dégradées par des micro-organismes vivants nécessitant un apport en dioxygène insufflé par le plancher.

Le mélange d'eaux et boues obtenu est ensuite transféré dans un bassin de décantation.

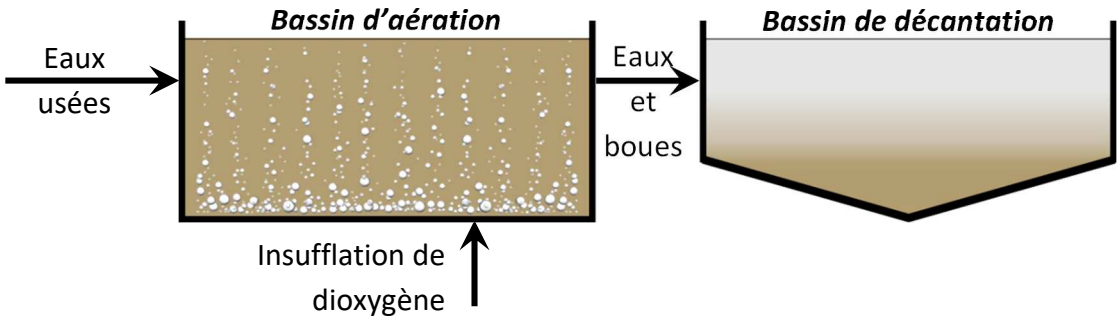


Schéma d'une station d'épuration à « boues activées »

Partie A

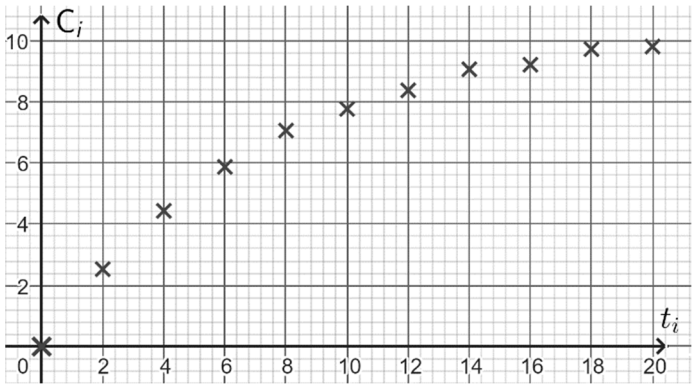
Pour vérifier le fonctionnement correct du bassin d'aération, il est rempli d'eau pure et on y insuffle le dioxygène. Au fur et à mesure de l'absorption du dioxygène insufflé, la concentration en dioxygène dans l'eau augmente jusqu'à se stabiliser à une concentration appelée concentration de saturation en dioxygène.

On mesure la concentration en dioxygène dans l'eau toutes les deux minutes à partir du début de la phase d'aération. Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

temps t_i (en min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
C_i (en mg · L^{-1})	0	2,531	4,438	5,875	7,063	7,770	8,378	9,066	9,215	9,726	9,809

1. Le nuage de points $(t_i\,;C_i)$ est représenté sur le graphique ci-dessous.

Expliquer graphiquement pourquoi un ajustement linéaire de ce nuage de points ne paraît pas approprié.



2. On pose $y_i = \ln(10{,}54 - \mathrm{C}_i)$. Le tableau ci-dessous donne certaines valeurs de y_i arrondies à 10^{-3}.

temps t_i (en min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$y_i = \ln(10{,}54 - \mathrm{C}_i)$	2,355	2,081	1,809	1,540	$\boldsymbol{u}$	1,019	0,771	0,388	$\boldsymbol{v}$	− 0,206	− 0,313

Indiquer sur la copie les deux valeurs manquantes $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ du tableau, arrondies à 10^{-3}.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $(t_i; y_i)$ sous la forme $y = at + b$, où les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-3}.

4. Dans ce qui suit, on choisit la droite d'équation $y = -0{,}14t + 2{,}35$ pour effectuer un ajustement du nuage de points $(t_i; y_i)$.
On souhaite utiliser cet ajustement pour exprimer, en $\mathrm{mg \cdot L^{-1}}$, la concentration en dioxygène dans l'eau, notée $\mathrm{C}(t)$, en fonction du temps t écoulé en minutes.
Déduire de ce qui précède que $\mathrm{C}(t) = 10{,}54 - A\mathrm{e}^{-0{,}14t}$ où A est un réel dont on donnera la valeur arrondie à 10^{-2}.

Partie B

Dans cette partie, on modélise la concentration en dioxygène dans l'eau (en $\mathrm{mg \cdot L^{-1}}$) au temps t écoulé (en minutes) par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ qui vérifie $f(0) = 0$ et qui est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + ry = 10{,}54r$$

où r est un nombre réel constant exprimé en $\mathrm{min^{-1}}$.

1. **a.** Écrire, en fonction du réel r, l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) : $y' + ry = 0$
b. Vérifier que la fonction constante g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 10{,}54$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
d. En déduire que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) = 10{,}54(1 - \mathrm{e}^{-rt})$.

2. La quantité de dioxygène transférée par minute dans le bassin d'aération est notée $\mathrm{AH_S}$ et vérifie :

$$\mathrm{AH_S} = r \times \mathrm{C_S} \times \mathrm{V}$$

On admet que $\mathrm{AH_S} = 1000\ \mathrm{g \cdot min^{-1}}$, $\mathrm{C_S} = 0{,}010\ 54\ \mathrm{g \cdot L^{-1}}$ et $\mathrm{V} = 700\ 000$ L.

a. Déterminer une valeur approchée du réel r exprimée à 10^{-2} $\mathrm{min^{-1}}$ près.
b. La modélisation par la fonction f et la valeur du réel r obtenue apparaissent-elles cohérentes avec la fonction C obtenue à la **partie A**, question **4.** ?

Partie C

Après cette première phase d'insufflation, une fois la concentration en dioxygène stabilisée, on désactive le système d'insufflation. Des réactions chimiques se déroulent alors dans le bassin d'aération, et la concentration en dioxygène dans ce bassin diminue alors jusqu'à atteindre $0 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

On remet alors en marche le système d'insufflation de dioxygène. La concentration en dioxygène dans le bassin d'aération augmente jusqu'à atteindre une nouvelle valeur de saturation.

Soit la fonction g définie pour tout $t \geq 0$ par $g(t) = 4{,}77(1 - \text{e}^{-0{,}09t})$.
On admet que la fonction g modélise l'évolution de la concentration en dioxygène en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ dans le bassin d'aération à partir de la remise en marche du système d'aération en fonction du temps t mesuré en minutes.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

   b. Déterminer au bout de combien de minutes la concentration en dioxygène atteindra la valeur $4{,}293 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, c'est-à-dire 90 % de la valeur de saturation apparente. On précisera la méthode utilisée.

2. **a.** On note G la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $\text{G}(t) = 4{,}77t + 53\text{e}^{-0{,}09t}$.
   Vérifier que la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. On admet que la concentration moyenne en dioxygène pendant les vingt-cinq premières minutes d'aération est égale à :

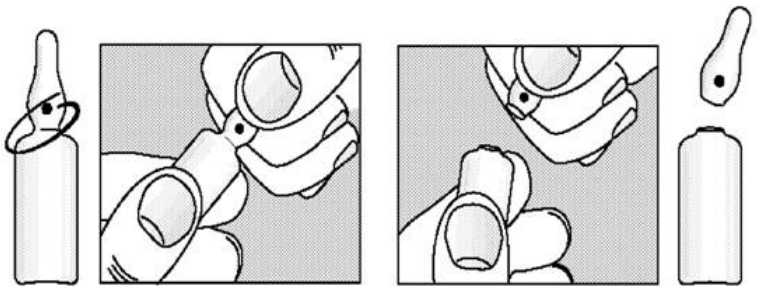
   $$C_m = \frac{1}{25}\int_0^{25} g(t)\text{d}t.$$

   Déterminer l'arrondi, à $0{,}1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, de la concentration moyenne en oxygène pendant les vingt-cinq premières minutes d'aération.

EXERCICE 2 (9 points)

Les parties **A**, **B** *et* **C** *de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.*

Des produits pharmaceutiques, injectables ou buvables, sont conditionnés dans des ampoules en verre dont une extrémité est faite pour être facilement cassée (cf. schéma ci-contre). Une telle ampoule est appelée ampoule bouteille.

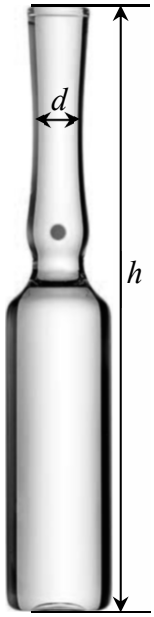


Partie A

Dans cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-3}.

Lors du calibrage, on contrôle deux dimensions de l'ampoule bouteille et on procède à son éjection de la ligne de finition si les deux dimensions sont hors tolérances. Ces deux dimensions sont (*cf.* schéma ci-contre) :

- le diamètre d de scellage où l'ampoule sera fermée après remplissage du produit pharmaceutique ;
- la hauteur totale h de l'ampoule.



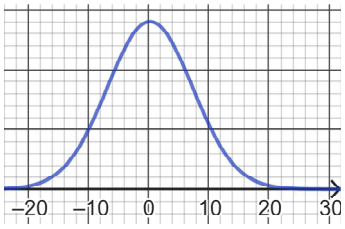
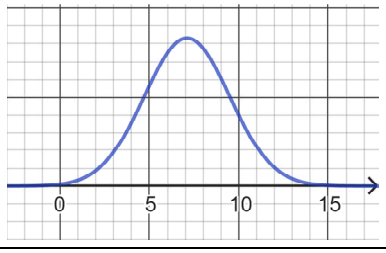
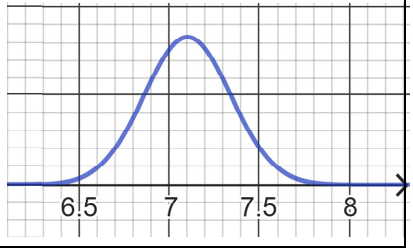
Ces deux dimensions sont contrôlées en début de ligne de finition.

On choisit au hasard une ampoule et on note D la variable aléatoire qui à chaque ampoule associe son diamètre d de scellage exprimé en mm et H la variable aléatoire qui, à chaque ampoule, associe sa hauteur totale h exprimée en mm. On admet que ces variables aléatoires peuvent être modélisées de la façon suivante :

- la variable aléatoire D suit la loi normale de moyenne 7,1 et d'écart type 0,24 ;
- la variable aléatoire H suit la loi normale de moyenne 102 et d'écart type 0,7.

On suppose que les variables aléatoires D et H sont indépendantes.

1. Parmi les trois courbes **I**, **II** et **III** représentées ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la variable aléatoire D. Indiquer sur la copie quelle est cette courbe et justifier ce choix.

Courbe I	**Courbe II**	**Courbe III**
		

2. **a.** Déterminer la probabilité $P(6{,}48 \leq D \leq 7{,}72)$.
b. Déterminer la probabilité $P(100{,}6 \leq H \leq 104{,}1)$.

3. Une ampoule est correctement calibrée si elle vérifie en même temps les deux conditions suivantes :

- son diamètre de scellage *d* appartient à l'intervalle $[6{,}48\,;\,7{,}72]$;
- sa hauteur totale *h* appartient à l'intervalle $[100{,}6\,;\,104{,}1]$.

Déduire de la question **2.** la probabilité qu'une ampoule prise au hasard en début de ligne de finition soit correctement calibrée.

Partie B

Dans cette partie, on prélève 50 ampoules bouteilles en début de ligne de finition.

Le nombre d'ampoules produites est suffisamment important pour que ce prélèvement puisse être assimilé à un tirage avec remise de 50 ampoules.

On admet que la probabilité qu'une ampoule, prise au hasard dans le prélèvement, soit correctement calibrée est égale à 0,97.

On désigne par *X* la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 ampoules en début de ligne de finition, associe le nombre d'ampoules correctement calibrées.

1. Sans justifier, donner la loi suivie par la variable aléatoire *X* et préciser ses paramètres.

2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire *X* et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On prélève 50 ampoules bouteilles en début de ligne de finition. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que, dans un tel prélèvement, au moins quatre ampoules ne soient pas correctement calibrées (dans ce cas, la ligne de finition est arrêtée pour réglage).

Partie C

Un technicien souhaite contrôler la qualité du remplissage des ampoules bouteilles par une solution. Dans ce but, il prélève un échantillon de 100 ampoules (un tel prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise du fait de l'importance de la production).

Le volume moyen de la solution contenue dans ces 100 ampoules est $v_e = 9{,}67$ mL.

Il souhaite tester l'hypothèse « *le volume de solution contenue dans une ampoule est égal à 10 mL* » à l'aide d'un test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

On désigne par *V* la variable aléatoire qui, à un échantillon de 100 ampoules prélevées au hasard dans l'ensemble de la production, associe la moyenne des volumes de solution contenue.

On pose pour hypothèse nulle « $H_0 : \mu = 10$ mL » et pour hypothèse alternative « $H_1 : \mu \neq 10$ mL ».

1. Sous l'hypothèse H_0, on admet que la variable aléatoire *V* suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart type 0,03.
Donner, sans justifier, un nombre réel h tel que $P(10 - h \leq V \leq 10 + h) \approx 0{,}95$ à 10^{-2} près.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. D'après l'échantillon prélevé par le technicien, peut-on accepter l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 5 % ? Justifier.

4. Si le test bilatéral avait été réalisé au seuil de signification de 1 %, quelle aurait été la région d'acceptation du test parmi les quatre proposées ci-dessous ? On ne justifiera pas la réponse.

$A = [9{,}97\,;10{,}03]$ $B = [9{,}95\,;10{,}05]$ $C = [9{,}94\,;10{,}06]$ $D = [9{,}92\,;10{,}08]$

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.