Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS CPDE, veuillez visiter :
btscpde.fr/annales-sujets-et-corriges

# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

## SESSION 2025

## Épreuve de mathématiques

**GROUPEMENT B** ***CODE : 25MATGRB4***

## Durée : 3 heures

| SPÉCIALITÉ | COEFFICIENT |
|---|---|
| Système photonique | 3 |

**Matériel autorisé :**

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.**

**L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**

**Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.**

## **EXERCICE 1** (8 points)

Pour fabriquer de l'aluminium en feuille on chauffe une plaque d'aluminium à $250$°C puis on la sort du four : c'est alors la phase de refroidissement. On étudie l'évolution de la température de la plaque d'aluminium durant cette phase.

On note $f(t)$ la température de la plaque d'aluminium à l'instant $t$.

$f(t)$ est exprimée en degré Celsius, et $t$ désigne le nombre de minutes de refroidissement.

*Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.*

### Partie A. Équation différentielle

On sait que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \ y' + 0{,}25y = 7{,}5 \ ,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$, et où $y'$ est la dérivée de $y$.

**1.** Résoudre l'équation différentielle :

$$(E_0) : \ y' + 0{,}25y \ = \ 0 \, .$$

On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| $y' + ay = 0$ | $y(t) = k\mathrm{e}^{-at}, \quad k \in \mathbb{R}$ |

**2.** Soit $c$ un nombre réel.

On considère la fonction constante $g$ définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$ par :

$$g(t) = \ c \, .$$

Déterminer le réel $c$ pour que la fonction $g$ soit solution de l'équation différentielle $(E)$.

**3.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**4.** Déterminer l'expression de la fonction $f$ sachant qu'à l'instant $t = 0$ la température est égale à $250$°C.

## Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(t) = 220\mathrm{e}^{-0{,}25t} + 30\,.$$

On admet que $f(t)$ représente la température (en degré Celsius) de la plaque d'aluminium après $t$ minutes de refroidissement.

**1.** Déterminer la valeur approchée à $0{,}1$°C de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.

**2.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
Quelle est la conséquence pour la courbe représentative de la fonction $f$ ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**3.** On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
Déterminer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$ .
En déduire les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty\,[$ .
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**4.** Un technicien affirme : « *en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés* ».
A-t-il raison ? Quelle est la durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de $150$°C ?
Les réponses devront être justifiées.

**5.** Réaliser sur la copie un schéma donnant l'allure de la courbe représentative de la fonction $f$. Ce schéma devra faire apparaître les résultats des questions **1** à **4**.

## **EXERCICE 2** (8 points)

*Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.*

On note $u(t)$ la tension aux bornes d'un générateur, exprimée en Volts, en fonction du temps, exprimé en seconde.

On sait que $u(t)$ est une fonction périodique de période $T = \pi$, définie par :

$$u(t) = t \quad \text{pour } t \in [0; \pi[ \,.$$

On dit aussi que $u(t)$ est un signal.

**1.** Donner la valeur de $u(1)$, $u(\pi)$, $u(\pi + 1)$, $u(4)$.

**2.** Représenter, sur la copie, un schéma donnant l'allure du signal $u(t)$, sur un intervalle dont la longueur est au moins égale à trois périodes.

**3.** Un signal est dit *alternatif* si sa valeur moyenne sur une période est nulle.
Le signal $u(t)$ est-il alternatif ? justifier.

**4.** Déterminer la fréquence $f$ du signal $u(t)$, ainsi que sa pulsation $\omega$ .

**5.** On s'intéresse à présent au développement en série de Fourier du signal $u(t)$.

On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} t\sin(2nt)\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2n} \,.$$

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$b_n = -\frac{1}{n} \,.$$

**6.** Les *amplitudes* d'un signal sont les nombres $A_n$ définis par :

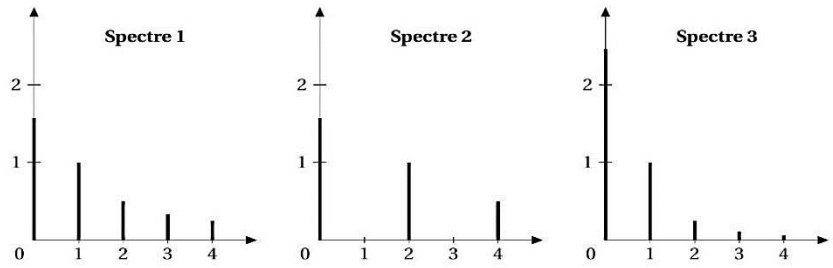
$$A_0 = |a_0| \text{ et, pour } n \geq 1, \qquad A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \,.$$

On admet que, pour tout entier $n \geq 1$ , on a $a_n = 0$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur exacte de $A_n$ | ….. | ….. | …. | ….. | ….. |
| Valeur approchée de $A_n$ à $10^{-2}$ près | ….. | ….. | ….. | ….. | ….. |

**7.** Le *spectre* d'un signal est un diagramme en barres dont les abscisses sont les entiers $n \geq 0$, et dont les ordonnées sont les amplitudes $A_n$ .




On a représenté ci-dessus trois spectres.

**a.** Expliquer pourquoi le **Spectre 2** ne peut pas être celui du signal $u(t)$.

**b.** Expliquer pourquoi le **Spectre 3** ne peut pas être celui du signal $u(t)$.

⋆⋆⋆

***FORMULAIRE sur les séries de Fourier.***

$f$ est une fonction périodique de période $T$ et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction $f$ :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \ .$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \ .$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{dt} \, .$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1) \ .$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1) \ .$$

➔ Lorsque la fonction $f$ est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{dt} \qquad (n \geq 1) \ .$$

## **EXERCICE 3** (4 points)

Cet exercice est constitué de deux questions indépendantes.

**1.** Une urne contient dix boules : sept blanches et trois noires.

Parmi les sept boules blanches, cinq portent le numéro 1 et deux portent le numéro 2.
Parmi les trois boules noires, deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 2.

On prélève au hasard une boule dans l'urne.

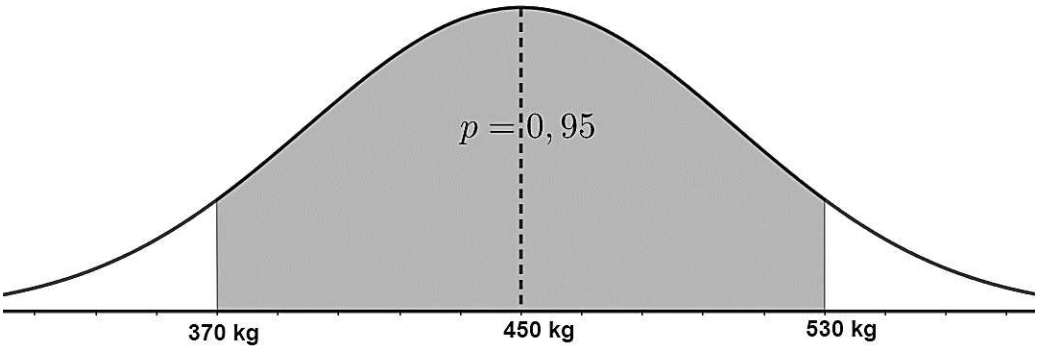
**a.** Quelle est la probabilité que ce soit une boule portant le numéro 2 ?

**b.** On sait que la boule prélevée porte le numéro 2.
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une boule noire ?

**2.** On considère un troupeau comportant un très grand nombre de chevaux.

On choisit au hasard un cheval et on s'intéresse à sa masse $M$, exprimée en kg.
On admet que la masse $M$ est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type $\sigma$.

La densité de la variable aléatoire $M$ est représentée ci-dessous. La zone grisée correspond à une probabilité égale à $0{,}95$.




**a.** Indiquer sans justifier la valeur de $\mu$.

**b.** Expliquer pourquoi $\sigma$ est environ égal à $40$kg.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.