Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS CPDE, veuillez visiter :
btscpde.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS CPDE

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'une fonction périodique et série de Fourier (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

On modélise en centimètres la distance entre le fond d'un tiroir et celui du meuble pendant la fermeture, à partir d'une équation différentielle et de conditions initiales. L'étude porte ensuite sur la fonction distance, un algorithme de seuil et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. **Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0.**

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. La solution générale est une combinaison des exponentielles associées à ces racines.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. **À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).**

La fonction représente la distance OM, en centimètres. Sa dérivée représente la vitesse de déplacement : les données initiales donnent directement la distance et la vitesse à $t = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression de la fonction :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Cette valeur exacte est la distance OM en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \left(\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}\right)$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, en justifiant.

La fonction est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. À 4 secondes,

$$f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427 \text{ cm} < 0{,}5 \text{ cm}.$$

Le seuil est donc franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. En utilisant la limite de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Quand $t \to +\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Les deux exponentielles tendent donc vers 0, ainsi que leur combinaison linéaire $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C possède une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote horizontale à cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle en multipliant par la dérivée de son exposant :

$$f'(t) = \frac{70}{3}(-1)e^{-t} - \frac{10}{3}(-4)e^{-4t}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, et poursuivre jusqu'à l'arrêt. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies à 10⁻² et le résultat du test de la condition.

La boucle augmente t de 0,1 à chaque passage. La condition est évaluée avec la valeur de $f(t)$, puis on inscrit cette valeur arrondie au centième.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

L'algorithme s'arrête à la ligne 39.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 39 : $t = 3{,}9$, $f(t) \approx 0{,}47$, condition FAUSSE.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À $t = 3{,}8$, la condition est encore vraie. Après l'incrément, elle devient fausse pour $t = 3{,}9$, valeur conservée à la fin de l'algorithme. La distance est alors inférieure à 0,5 cm.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé selon le critère donné.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On applique la définition de la moyenne :

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

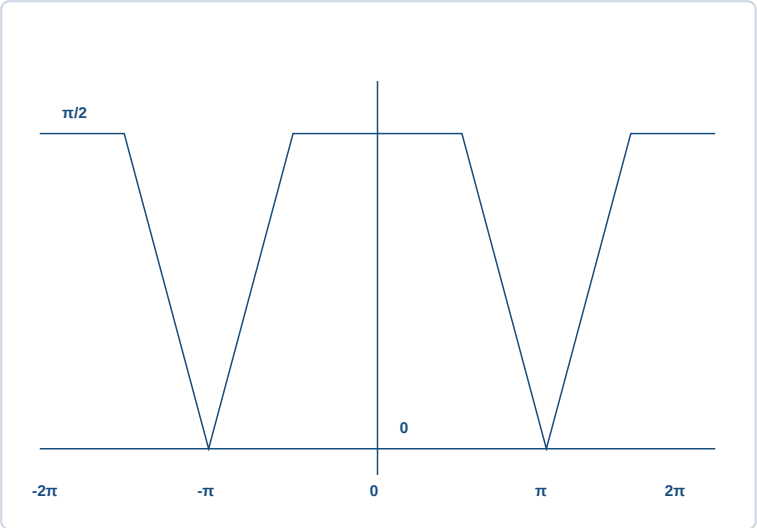
2. Étude d'une fonction périodique et série de Fourier

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], puis son développement en série de Fourier. Les questions portent sur les coefficients, une somme partielle, l'identification d'une courbe et l'estimation de l'erreur sur une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

Sur $[0, \pi/2]$, la courbe est horizontale à la hauteur $\pi/2$, puis elle suit le segment reliant $(\pi/2, \pi/2)$ à $(\pi, 0)$. La fonction étant paire, on reproduit cette forme par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Sa période étant 2π, on répète ensuite le motif par translations de 2π sur tout l'intervalle demandé.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe périodique de période 2π, paire, passant par $(k\pi, 0)$ pour k impair et de hauteur $\pi/2$ sur les intervalles centraux.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Comme f est paire, le produit $f(t)\sin(nt)$ est impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi, \pi]$ est donc nulle. Avec la formule de Fourier, cela donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La pulsation d'une fonction de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, la période donnée est $T = 2\pi$. En remplaçant dans la formule, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que le coefficient de Fourier a₀ est égal à 3π/8.**

La fonction étant paire, la moyenne sur une période vaut $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0, \pi/2]$, l'aire sous la courbe est celle d'un rectangle de largeur $\pi/2$ et de hauteur $\pi/2$, soit $\pi^2/4$. Sur $[\pi/2, \pi]$, elle est celle d'un triangle d'aire $\pi^2/8$. Ainsi, $a_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8})$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

La formule donnée pour une fonction paire est $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en $[0, \pi/2]$ et $[\pi/2, \pi]$. Sur le premier intervalle, $f(t) = \pi/2$, donc le facteur $2/\pi$ simplifie cette constante en 1. Sur le second, $f(t) = \pi - t$. On obtient ainsi l'égalité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

Question 6. **En admettant que aₙ = 2/(πn²)[cos(nπ/2) - cos(nπ)], déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.**

Dans la formule admise, on remplace successivement n par 1, 2 et 3. On utilise les valeurs $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\cos(2\pi) = 1$ et $\cos(3\pi) = -1$. Les coefficients exacts obtenus sont rassemblés dans le tableau.

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. **Déduire l'expression $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients sinus sont nuls. En remplaçant a_0, a_1, a_2 et a_3 par leurs valeurs déterminées précédemment, on obtient l'expression demandée.

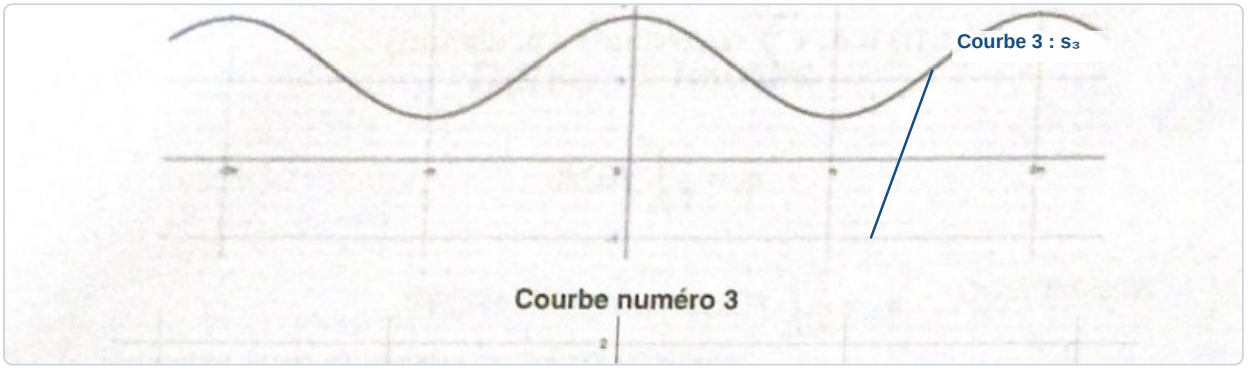
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La somme partielle s_3 correspond à la courbe numéro 3.

Courbe associée à s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4}.**

On substitue les coefficients exacts dans la définition de P : $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. Le calcul donne environ $1{,}64371784$. Arrondi au 10^{-4}, cela donne $1{,}6437$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9.b. **Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

Le pourcentage d'erreur vaut $\frac{|F^2-P|}{F^2} \times 100$. Avec $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$ et la valeur de P calculée à la question précédente, il est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, la réponse correspondante est $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une fonction paire et sa série de Fourier. Elle évalue calcul, raisonnement, représentation graphique, algorithme et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La distance du tiroir est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, avec t en secondes et f(t) en centimètres.
- Pour une fonction paire, $b_n = 0$ et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.
- La pulsation d'une fonction de période T vaut $\omega = 2\pi/T$; ici $T = 2\pi$ et $\omega = 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et le signe négatif de la vitesse initiale dans les conditions f(0) et f'(0).
- Pour l'algorithme, vérifier chaque valeur de t et appliquer le test d'arrêt strict avant l'interprétation.
- Distinguer le coefficient a_0 des coefficients a_n et utiliser la formule adaptée à une fonction paire.
- Pour la question à choix multiples, comparer P à F^2 et ne recopier qu'une seule réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer les conditions initiales pour l'équation différentielle du tiroir ?

La distance initiale est de 20 cm, donc f(0) = 20. La vitesse initiale est négative et vaut -10 $cm \cdot s^{-1}$, donc f'(0) = -10. Ce signe traduit le rapprochement des points O et M.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire, tandis que sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Les coefficients de Fourier associés aux sinus valent ainsi $b_n = 0$.

Q : Comment organiser le temps et le barème de cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Répartissez le temps entre l'étude du tiroir et la série de Fourier, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les arrondis et les réponses.

Q : Quelles exigences de présentation et de notation faut-il retenir ?

Justifiez les démonstrations et présentez clairement les calculs et le tableau de variations. Le graphique doit respecter la parité et la période. Pour la question 9.b, une seule réponse est demandée et aucune justification n'est attendue.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2023/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Processus de Découpe et d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.