Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS CPDE, veuillez visiter :
btscpde.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS CPDE

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Approvisionnement, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à emboutteiller (12 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, on étudie le nombre de personnes équipées d'un implant médical depuis 2013, à partir de données annuelles. Deux modèles sont mobilisés : un ajustement exponentiel des données et une fonction obtenue à l'aide d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant y = ln(N - 30) et en arrondissant les valeurs au millième.

Pour chaque rang, on calcule le logarithme népérien de l'effectif en milliers diminué de 30. Les rangs correspondent aux années 2013 à 2021 et les résultats sont arrondis au millième.

Année	Rang k	y = ln(N - 30)
2013	0	3,268
2014	1	3,336
2015	2	3,418
2016	3	3,497
2017	4	3,578
2018	5	3,656
2019	6	3,738
2020	7	3,818
2021	8	3,898

Par exemple, pour 2013 : $\ln(56{,}25 - 30) \approx 3{,}268$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour k de 0 à 8 : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.

La régression linéaire des points $(k_i ; y_i)$, avec les valeurs transformées calculées à la question précédente, donne une pente d'environ $0{,}0794$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3{,}2605$. L'énoncé demande d'arrondir séparément ces coefficients au centième : on obtient donc $a = 0{,}08$ et $b = 3{,}26$.

La droite d'ajustement porte sur les valeurs de y, et non directement sur les effectifs N.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0{,}08k + 3{,}26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

Comme $y = \ln(N - 30)$, la droite d'ajustement donne $\ln(N - 30) = 0{,}08k + 3{,}26$. En prenant l'exponentielle des deux membres, on obtient $N - 30 = e^{3{,}26}e^{0{,}08k}$. Or $e^{3{,}26} \approx 26{,}05$. L'effectif modélisé, exprimé en milliers, est donc $N(k) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08k}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08k}$, en milliers.

Question 3.a. En supposant que le modèle reste valide plusieurs années encore, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.

Le rang de l'année 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. En remplaçant dans le modèle, $N(13) = 30 + 26{,}05e^{0{,}08\times 13} \approx 103{,}70$. Cette valeur est en milliers de personnes ; arrondie au millier près, elle donne une prévision d'environ 104 milliers de personnes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Environ 104 000 personnes équipées en 2026.

Question 3.b. Si le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, déterminer si le modèle étudié reste valide sur le long terme et justifier la réponse.

Le coefficient de k dans l'exponentielle est positif : $e^{0{,}08k}$ tend donc vers $+\infty$ lorsque k augmente indéfiniment. Le modèle prévoit alors une croissance sans limite du nombre de personnes équipées.

Cette prévision finit par dépasser les 60 millions d'habitants du pays. Le modèle exponentiel ne peut donc pas rester valide à long terme.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le modèle tend vers l'infini, contrairement à une population limitée à 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,05y = 0.

On réécrit l'équation homogène sous la forme $y' = -0{,}05y$. Une équation différentielle de la forme $y' = ay$ a pour solutions $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0{,}05$. Comme aucune condition initiale n'est imposée dans cette question, toutes les valeurs réelles de C conviennent.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

On cherche une solution constante $y(t) = c$, dont la dérivée est nulle. L'équation devient $0{,}05c = 0{,}05$, donc $c = 1$. Cette fonction constante est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.

Une solution particulière de (E) est la fonction constante égale à 1. Les solutions de l'équation homogène associée sont $Ce^{-0{,}05t}$. En ajoutant la solution particulière à ces solutions homogènes, on obtient toutes les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$:

$$y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.

La solution générale est $g(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$. La condition initiale $g(0) = 8$ donne $1 + C = 8$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 7$. L'expression obtenue vérifie bien la condition initiale.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0{,}05t}$, pour $t \geq 0$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le temps en années depuis 2013 et f(t) est exprimée en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

De 2013 à 2026, il s'écoule $t = 13$ ans. Le modèle donne $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0{,}05 \times 13}} \approx 96{,}684$. Comme f est exprimée en milliers, l'arrondi au millier de personnes donne environ 97 000 personnes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Environ 97 000 personnes équipées en 2026.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0{,}05t} \to 0$. Ainsi, le dénominateur de $f(t) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0{,}05t}}$ tend vers 1, d'où $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$.

Les valeurs de f étant exprimées en milliers, le modèle prévoit que le nombre de personnes équipées se rapproche de 450 000 à long terme.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Limite : 450, soit 450 000 personnes équipées à long terme selon le modèle.

Question 4. **À partir de l'expression fournie de f'(t), déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout $t \geq 0$, l'expression donnée de la dérivée, $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1 + 7e^{-0{,}05t})^2}$, est strictement positive : l'exponentielle et le dénominateur sont positifs. Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Dans le contexte, ce modèle prévoit une augmentation continue du nombre de personnes équipées au fil des années.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente selon le modèle.

Question 5. **Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

On résout $f(t) > 120$, car les effectifs sont exprimés en milliers. Comme le dénominateur est positif, l'inégalité équivaut à $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, soit $t > \dfrac{\ln(11/28)}{-0{,}05} \approx 18{,}69$. Le premier rang annuel entier qui dépasse ce seuil est $t = 19$. En ajoutant 19 à l'année de départ 2013, on obtient l'année recherchée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Le seuil de 120 000 personnes est dépassé à partir de 2032.

2. Approvisionnement, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice étudie les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle du volume d'eau à partir d'un échantillon de 100 bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Associer la phrase « La file d'entrée ne se vide pas dans la journée » à l'information correspondante du tableau de droite.

La file d'entrée ne se vide pas signifie qu'elle n'est jamais vide pendant la journée. C'est donc l'événement contraire de A, puisque A désigne le fait que la file soit vide au moins une fois. La probabilité demandée est alors celle de $\overline{A}$. Parmi les informations du tableau, la lettre E donne $0{,}97$, valeur cohérente avec le complément de $P(A) = 0{,}03$. Il faut donc associer la phrase à cette lettre, et non à une probabilité d'intersection entre les deux événements.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse E : la probabilité que la file ne se vide pas est $P(\overline{A}) = 0{,}97$, soit 97 %.

Question 2. Associer l'événement « La file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée mais pas le réservoir » à l'information correspondante du tableau de droite.

1. La file d'entrée est vide au moins une fois : c'est l'événement A.
2. Le réservoir n'est pas vide : c'est l'événement contraire de B.
3. Les deux conditions doivent être réunies. L'événement recherché est donc $A \cap \overline{B}$. Le tableau associe précisément cette expression à la lettre C. Il s'agit ici d'identifier l'événement, et non de calculer sa probabilité. La donnée d'indépendance permettrait de la calculer si cela était demandé, mais l'association attendue est simplement celle de la lettre correspondant à l'intersection indiquée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse C : l'événement recherché est $A \cap \overline{B}$, la file étant vide et le réservoir ne l'étant pas.

Question 3. Associer la probabilité que la file d'entrée et le réservoir soient tous deux vides au moins une fois dans la journée à l'information correspondante du tableau de droite.

La phrase décrit la réalisation simultanée de A et de B : la file et le réservoir sont chacun vides au moins une fois dans la journée. L'événement est donc $A \cap B$. Comme A et B sont indépendants, la probabilité de cette intersection est le produit des probabilités : $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$. Dans la colonne de droite, cette valeur est associée à la lettre F. On retient donc cette lettre pour la troisième phrase du tableau.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Réponse F : $P(A \cap B) = 0{,}0006$, soit une probabilité de 0,06 % que les deux événements surviennent.

Question 4. Associer la probabilité que la machine connaisse un défaut d'approvisionnement dans la journée à l'information correspondante du tableau de droite.

Un défaut d'approvisionnement survient lorsqu'au moins l'un des deux événements A ou B se réalise. On cherche donc $P(A \cup B)$. Les événements étant indépendants, $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$. La formule de l'union donne alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006 = 0{,}0494$. Dans le tableau, la valeur arrondie à 0,049 correspond à la lettre D.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Réponse D : la probabilité d'un défaut d'approvisionnement est $0{,}0494$, soit environ 4,94 %.

Partie B - Pannes de la machine sur 200 jours

Question 1. La probabilité de panne un jour quelconque est 0,025 et les jours de panne sont indépendants. Donner, sans justification, la loi suivie par X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque journée correspond à une épreuve de Bernoulli : la machine tombe en panne avec la probabilité $0{,}025$, et les pannes des différents jours sont indépendantes. La variable X compte le nombre de journées avec panne parmi les 200 journées consécutives. Elle suit donc une loi binomiale, dont le premier paramètre est le nombre d'épreuves et le second la probabilité de succès, ici une panne. Il faut préciser ces deux paramètres dans l'écriture de la loi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$. X compte le nombre de jours de panne sur la période de 200 jours.

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

1. Pour l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson, le paramètre est le produit du nombre d'épreuves par la probabilité de panne pour une épreuve.
2. Dans cette situation, ce produit vaut $np = 200 \times 0{,}025 = 5$. Le paramètre de la loi de Poisson utilisée pour approcher la loi de X est donc $\lambda = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le paramètre de la loi de Poisson qui approche la loi de X est $\lambda = np = 200 \times 0{,}025 = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une variable Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, l'événement $Y \leq 10$ regroupe les valeurs entières de 0 à 10. On additionne donc leurs probabilités : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k e^{-5}}{k!}$. L'évaluation à la calculatrice donne environ $0{,}9863047$. Arrondie au millième, cette probabilité devient $0{,}986$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $Y \sim \mathcal{P}(5)$, la probabilité demandée, arrondie au millième, est $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique semble suggérer que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule donnée pour la loi de Poisson, dire si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

> Pour tout entier $k \geq 1$, $P(Y = k) = \frac{5^k e^{-5}}{k!}$.

En prenant $k = 15$, le numérateur et le dénominateur sont tous deux strictement positifs, donc la probabilité n'est pas nulle. Sa valeur est très petite, ce qui explique qu'elle ne soit pas visible à l'échelle du graphique. Le graphique suggère une probabilité égale à zéro, mais il ne permet qu'une lecture approximative et ne prouve pas cette égalité. La formule établit que la conjecture est fausse.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{15!} \approx 0{,}000157$, une valeur strictement positive.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir des volumes et des effectifs du tableau, déterminer à la calculatrice la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

Volume (cL)	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**
Effectif	17	20	43	13	7

La moyenne pondérée est $\bar{x} = \frac{73\times17+74\times20+75\times43+76\times13+77\times7}{100} = 74{,}73$ cL. Le calcul de l'écart type à partir des 100 mesures donne $\sigma \approx 1{,}103$ cL. L'arrondi demandé au centième est donc $1{,}10$ cL. On utilise ici l'écart type descriptif de l'échantillon, calculé avec le diviseur 100.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour les 100 bouteilles, la moyenne est $74{,}73$ cL et l'écart type arrondi au centième vaut $1{,}10$ cL.

Question 2.a. **Sous l'hypothèse H₀ : m = 75, la moyenne Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) soit égal à 0,95, à 10^{-2} près.**

1. Sous H_0, la variable centrée réduite $\frac{Z-75}{0{,}11}$ suit la loi normale centrée réduite.
2. L'intervalle central contenant 95 % de cette loi est approximativement $[-1{,}96 ; 1{,}96]$. Ainsi, $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL.
3. À 10^{-2} près, on obtient $h = 0{,}22$ cL.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La demi-largeur de l'intervalle central à 95 % est $h \approx 0{,}22$ cL, arrondie au centième.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % portant sur H₀ : m = 75 contre H₁ : m ≠ 75.**

Le test est bilatéral : on rejette H_0 si la moyenne observée est trop éloignée de 75 cL, dans un sens ou dans l'autre. L'intervalle central à 95 % est obtenu avec la valeur de h arrondie à $0{,}22$ cL.

- Si $74{,}78 \leq \bar{x} \leq 75{,}22$, on accepte H_0.
- Si la moyenne observée est hors de cet intervalle, on rejette H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Accepter H_0 si $74{,}78 \leq \bar{x} \leq 75{,}22$ cL ; rejeter H_0 si la moyenne est hors de cet intervalle.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon donné, indiquer si l'hypothèse H₀ : m = 75 peut être acceptée.**

La moyenne observée dans l'échantillon est $74{,}73$ cL. La borne basse de l'intervalle d'acceptation du test est $74{,}78$ cL. Comme $74{,}73 < 74{,}78$, la moyenne est située hors de l'intervalle $[74{,}78 ; 75{,}22]$. Selon la règle de décision énoncée, on rejette donc l'hypothèse nulle au seuil de 5 %. Les résultats de cet échantillon ne permettent pas d'accepter que la moyenne soit égale à 75 cL.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : $74{,}73$ cL est inférieur à la borne d'acceptation $74{,}78$ cL.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, dure 2 heures et son coefficient varie selon la spécialité. Ses deux exercices de 10 points portent sur la modélisation de l'équipement d'une population en implants médicaux et sur une machine à embouteiller. Elle évalue les ajustements exponentiels, les équations différentielles, les probabilités, les lois de Poisson et le test statistique bilatéral.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Poser y = ln(N - 30) permet de linéariser le modèle, puis d'obtenir N en exponentiant l'équation ajustée.
- Pour résoudre y' + ay = c, combiner une solution constante c/a avec la solution générale de l'équation homogène.
- Le nombre de pannes en 200 jours suit une loi binomiale B(200 ; 0,025), approchée ici par une loi de Poisson de paramètre np = 5.
- Le test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle central [75 - h ; 75 + h] sous H_0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Les nombres de personnes équipées sont exprimés en milliers, et le rang ou le temps est compté depuis 2013.
- Pour évaluer un modèle en 2026, convertir l'année en rang k dans la partie A ou en durée t dans la partie B.
- Pour le défaut d'approvisionnement, distinguer les événements A et B, leurs complémentaires et leur intersection; A et B sont indépendants.
- Dans le test, comparer la moyenne de l'échantillon à l'intervalle critique et utiliser l'écart type 0,11 indiqué sous H_0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de l'ajustement linéaire au modèle exponentiel de l'implant ?

On ajuste y = ln(N - 30) en fonction du rang k par une droite y = ak + b. En exponentiant, on obtient N - 30 = e^(ak+b), ce qui fournit le modèle exponentiel demandé pour N.

Q : Pourquoi le nombre de pannes peut-il être approché par une loi de Poisson ?

Le nombre de pannes suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,025. Pour un grand nombre de jours et une faible probabilité quotidienne, l'approximation de Poisson utilise le paramètre λ = np = 5.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comprend deux exercices de 10 points. Les parties A et B de l'exercice 1 sont indépendantes, tout comme les trois parties de l'exercice 2. Répartissez le temps selon les points et gardez une marge pour vérifier les unités et les arrondis.

Q : Comment décider si la machine est correctement réglée au seuil de 95 % ?

On compare la moyenne observée à l'intervalle [75 - h ; 75 + h] obtenu sous H_0. Si elle appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0 au seuil de 5 %; sinon, on rejette l'hypothèse de réglage correct.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Processus de Découpe et d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.