Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS CPDE, veuillez visiter :
btscpde.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS CPDE

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude de sa vitesse (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude de sa vitesse

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m/s sur un axe horizontal avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée au moyen d'une équation différentielle, de limites, de variations, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a dans la forme générale, sans condition initiale à imposer à cette question.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\boxed{y(t) = ke^{-0,8t}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle. En substituant dans le membre de gauche de l'équation différentielle, on obtient :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

L'égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$. La fonction proposée est donc bien une solution particulière de l'équation complète.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière est $g(t) = 5$. La différence entre deux solutions de l'équation complète vérifie l'équation homogène résolue en 1.a. Toute solution s'écrit donc comme la somme de 5 et d'une solution $ke^{-0,8t}$, où k peut prendre toute valeur réelle.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\boxed{y(t) = ke^{-0,8t} + 5, \quad k \in \mathbb{R}}$$

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $k + 5 = 20$, puis $k = 15$.

En reportant cette constante dans la solution générale, on obtient la vitesse du chariot pour tout $t \geq 0$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{f(t) = 15e^{-0,8t} + 5, \quad t \geq 0}$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

La fonction est donnée par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t}$ tend vers zéro, tout comme son multiple $15e^{-0,8t}$. Il ne reste que le terme constant 5, ce qui établit la limite demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5}$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Une courbe représentant une fonction qui tend vers une valeur finie en $+\infty$ admet une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. Ici, cette asymptote est donc la droite horizontale d'ordonnée 5.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\mathcal{C}$ admet l'asymptote horizontale $\boxed{y = 5}$.

Question 2. **À partir de l'expression fournie pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$: la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5. Son tableau de variation est donc :

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse devrait atteindre zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. Sa vitesse décroît, mais reste toujours positive et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Le modèle ne prévoit donc pas l'arrêt du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et tend vers cette valeur.

Question 4.a. Vérifier que la fonction F définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Comme $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$, on obtient :

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

La dérivée de F est bien la fonction étudiée : F est une primitive de f sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5}$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. Sachant que la distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de f entre ces instants, calculer sa valeur exacte entre t0 = 0 et t1 = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 vaut $F(1) - F(0)$. Avec la primitive donnée, on calcule :

$$d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}.$$

Cette expression est la valeur exacte en mètres. L'évaluation numérique, arrondie au centième de mètre comme demandé, donne la distance parcourue.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \text{m} \approx 15,33\ \text{m}}$

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir parmi les propositions le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.**

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les choix proposés, seule la troisième proposition contient ces termes et ce reste sous la bonne forme.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Troisième proposition : $\boxed{f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t), \quad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0}$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. D'après l'expression de la fonction, $f(0) = 20$. La dérivée donnée dans l'énoncé vaut $f'(0) = -12e^0 = -12$. On remplace ces deux valeurs dans l'équation de la tangente :

$$y = 20 - 12t.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{T : y = 20 - 12t}$

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

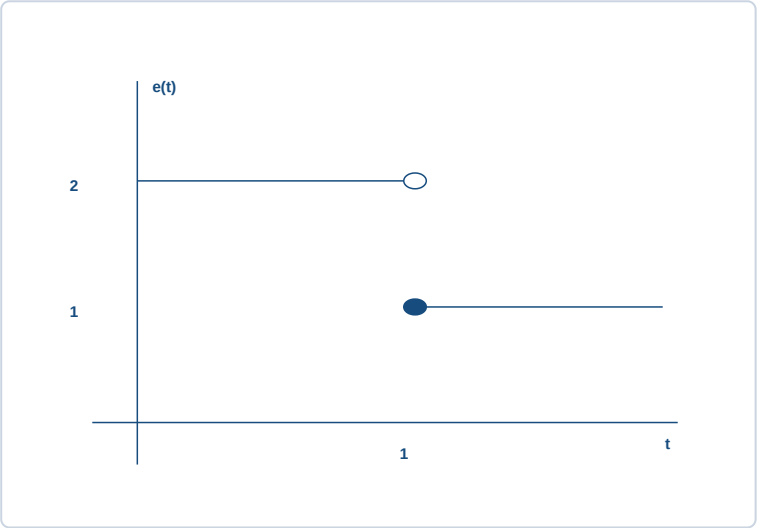
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1), et sa fonction de transfert H(p) est donnée. L'exercice étudie les signaux d'entrée et de sortie avec les transformées de Laplace, puis demande de représenter leurs courbes et d'analyser le comportement de la sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Les signaux sont causaux, donc $e(t)$ vaut 0 avant 0. À partir de 0, $U(t)$ vaut 1 : le signal prend la valeur 2. À partir de 1, le terme $U(t-1)$ vaut aussi 1, ce qui abaisse le signal à 1. Le tracé distingue donc le point fermé en (0 ; 2), le point ouvert en (1 ; 2) et le point fermé en (1 ; 1).

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$; 2 si $0 \leq t < 1$; 1 si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité, la transformée de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$ est la différence des transformées des deux termes. Le formulaire donne \($U(t)$) = $1/p$ et \($U(t-1)$) = e^{-p}/p. On multiplie la première par 2, puis on soustrait la seconde.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(p) = (2 - e^{-p})/p$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. **Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e^(-p).**

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. On remplace $H(p)$ par $1/(p + 1)$ et $E(p)$ par $(2 - e^{-p})/p$, puis on distribue le facteur $1/(p + 1)$. Cela donne directement les deux fractions demandées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. **Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).**

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p + 1)$. Le numérateur obtenu est $(p + 1) - p$, qui se réduit à 1. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. **Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, 1/(p + 1), e^(-p)/p et e^(-p)/(p + 1). Utiliser au besoin le formulaire fourni.**

On utilise les transformées usuelles du formulaire, puis la propriété de retard : multiplier une transformée par e^{-p} revient à retarder le signal d'une unité. Cette propriété s'applique à $U(t)$ comme à $e^{-t}U(t)$. Les quatre inverses sont présentées ci-dessous dans l'ordre de la question.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p + 1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t - 1)$
$e^{-p}/(p + 1)$	$e^{-(t - 1)}U(t - 1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Par transformée inverse, le premier terme devient $2(1 - e^{-t})$. Le second est retardé d'une unité et s'annule pour $0 \leq t < 1$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), en donnant sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

La formule donnée s'applique en $t = 1$. En substituant cette valeur, on obtient $(e - 2)e^{-1} + 1$. Comme $e \times e^{-1} = 1$, l'expression se simplifie en $2 - 2/e$. L'évaluation numérique donne environ 1,264, soit 1,3 au dixième.

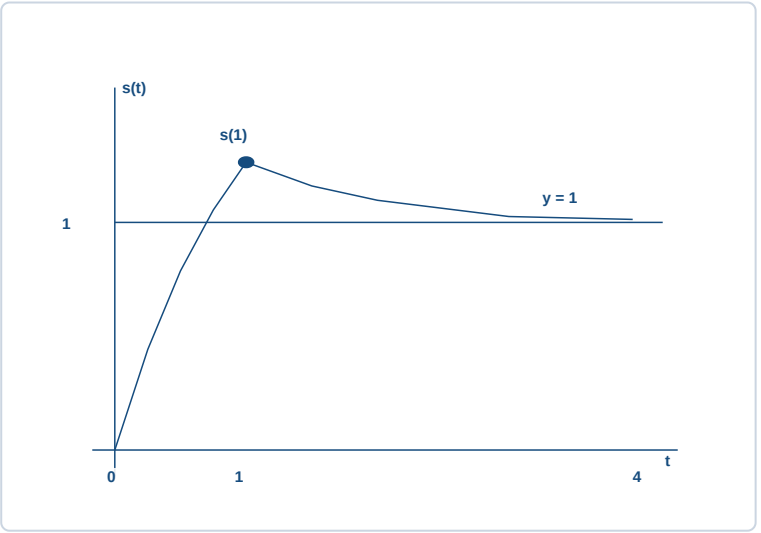
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur [0 ; 1[, on trace la fonction croissante $2(1 - e^{-t})$. En $t = 1$, elle atteint $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, la formule donnée est décroissante car $e - 2$ est positif et e^{-t} décroît. La courbe rejoint l'asymptote horizontale $y = 1$ par au-dessus.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe croissante jusqu'à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroissante vers l'asymptote $y = 1$.

Question 5.c. **Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t \geq 1$, on a $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le facteur e^{-t} tend vers 0. Le terme qui le multiplie tend donc aussi vers 0, et la limite de $s(t)$ est le terme constant 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de dix points étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonction, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at).
- Une limite finie L de f(t) en +∞ implique une asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue sur [t0 ; t1] est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est F(p)e^(-ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle avec second membre constant, trouver une solution particulière avant d'écrire la solution générale.
- Justifier les variations à l'aide du signe de la dérivée et intégrer la limite au tableau de variation.
- Pour calculer une distance, évaluer une primitive aux deux bornes de l'intervalle demandé.
- Pour les signaux définis par morceaux, respecter le seuil t = 1 et distinguer les intervalles concernés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre avec un second membre constant ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis cherchez une solution particulière constante. La solution générale est la somme des deux, et la condition initiale permet ensuite de déterminer la constante d'intégration.

Q : Comment utiliser le formulaire de Laplace pour un signal décalé ?

Repérez la forme f(t - a)U(t - a) : sa transformée est F(p)e^(-ap). Pour retrouver le signal, appliquez la transformation inverse puis tenez compte du décalage et de l'échelon.

Q : Comment répartir son temps et tenir compte du barème de cette épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points, soit 20 points au total, pour deux heures. Répartissez votre temps entre les exercices et gardez une marge pour vérifier les calculs, les unités et les tracés à rendre.

Q : Quelle règle de notation s'applique au QCM sur le développement limité ?

Une seule proposition est exacte et il faut la recopier sans justification. Le sujet précise qu'une réponse fausse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Conception des Processus de Découpe et d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.