Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS CPDE, veuillez visiter :
btscpde.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace à 20 m·s⁻¹ lorsque son système de freinage est actionné, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'étude porte sur cette équation, les variations et la représentation graphique de la vitesse, la distance parcourue, un développement limité et une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 à l'aide de la formule fournie.

La formule fournie indique que les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = Ke^{-at}$, où K est une constante réelle. Ici, le coefficient de y est $a = 0,8$. En le remplaçant dans la formule, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle considéré $[0; +\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ke^{-0,8t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. On remplace alors g et sa dérivée dans le membre de gauche : $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Cette égalité est vraie pour tout t de l'intervalle. Le membre de gauche est donc égal au second membre de l'équation différentielle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène $y' + 0,8y = 0$, trouvée à la question précédente. En faisant varier la constante réelle de cette solution homogène, on obtient l'ensemble des solutions recherché.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ke^{-0,8t} + 5$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

1. La solution générale est $f(t) = Ke^{-0,8t} + 5$. Pour $t = 0$, on a $e^0 = 1$, donc $f(0) = K + 5$.
2. La condition initiale impose $K + 5 = 20$, soit $K = 15$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction qui vérifie l'équation différentielle et la condition demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. **La fonction est définie par f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5 sur [0 ; +∞[. Démontrer que sa limite lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

Quand $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t}$ tend vers zéro, et le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, il ne reste donc à la limite que le terme constant 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. **Déduire de la limite de f en +∞ que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.**

La limite de $f(t)$ lorsque $t \to +\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative de f admet alors une asymptote horizontale dont l'ordonnée est cette limite. L'équation de cette droite est donc $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale de C : $y = 5$.

Question 2. **On admet que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.**

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : f est strictement décroissante. Son départ vaut $f(0) = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. À partir de l'étude de la fonction f, déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit atteindre zéro. Or f est décroissante, part de 20 et tend vers 5. De plus, pour tout instant fini $t \geq 0$, le terme $15e^{-0,8t}$ est strictement positif.

- La vitesse reste supérieure à 5.
- Elle ne s'annule donc jamais : le système ne permet pas l'arrêt complet selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sans s'annuler.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée donne $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, qui est précisément $f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$: F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance parcourue entre deux instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ seconde, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance parcourue est l'intégrale de f entre 0 et 1. Puisque F est une primitive, elle vaut $F(1) - F(0)$.
2. Avec l'expression donnée de F, cela donne $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres.
3. La valeur approchée est $15,3251$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : sélectionner, parmi les trois propositions, l'expression du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme de Taylor d'ordre 2 affiché sur le sujet est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le développement limité doit conserver ces termes et comporter un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La troisième proposition est la seule qui respecte à la fois les coefficients et la forme du reste.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La valeur initiale donne $f(0) = 20$. D'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et a pour pente -12.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

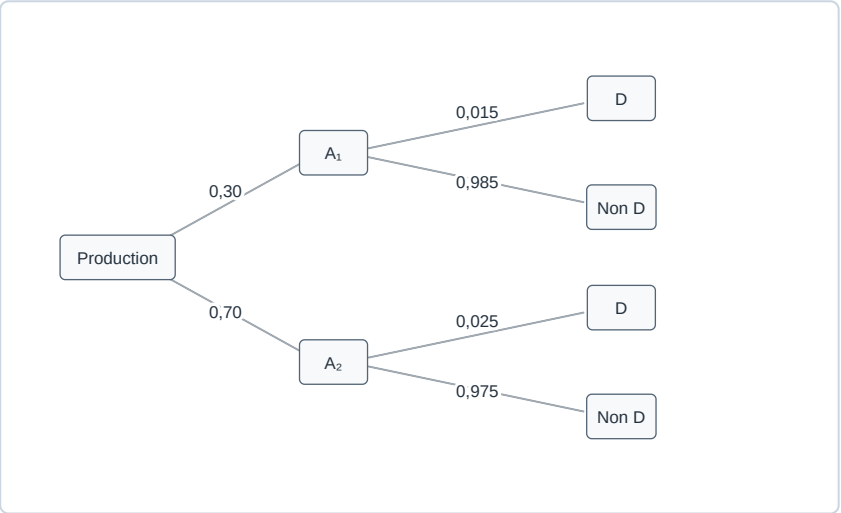
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents; l'exercice étudie les probabilités liées à l'origine et à la conformité des tubes. Il traite aussi de leur durée de fonctionnement selon une loi exponentielle et de l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. **Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, avec les probabilités de provenance de chaque atelier et les probabilités qu'un tube présente ou ne présente pas de défaut.**

La première bifurcation donne la provenance du tube : 30 % viennent de l'atelier 1 et 70 % de l'atelier 2. Pour chaque atelier, les deux branches indiquent le défaut et l'absence de défaut. Les probabilités correspondantes sont les taux fournis dans l'énoncé et leurs complémentaires : 1,5 % et 98,5 % pour l'atelier 1, 2,5 % et 97,5 % pour l'atelier 2.

Arbre des probabilités des tubes



A_1 : atelier 1 ; A_2 : atelier 2 ; D : tube présentant un défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré ci-dessous.

Question 2. **Calculer la probabilité qu'un tube choisi au hasard provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit $P(A_1 \cap D)$.**

Pour que le tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, on multiplie la probabilité qu'il vienne de cet atelier par son taux de défaut : $\mathbf{P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045}$. Cette probabilité conjointe correspond à 0,45 % de la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\mathbf{P(A_1 \cap D) = 0{,}0045}$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard présente un défaut est P(D) = 0,0195, valeur indiquée dans le texte imprimé. Les données affichées et une annotation manuscrite sur la page signalent une discordance avec cette valeur.**

Les deux ateliers peuvent produire un tube défectueux. On additionne donc les probabilités des deux chemins menant à D : **P(D) = 0,30 × 0,015 + 0,70 × 0,025 = 0,022**. La valeur imprimée 0,0195 est en désaccord avec les données de l'énoncé ; l'annotation manuscrite indique bien 0,022.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **P(D) = 0,022**.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

Parmi les tubes sans défaut, ceux de l'atelier 2 ont une probabilité conjointe de 0,70 × 0,975 = 0,6825. La probabilité d'obtenir un tube sans défaut est 1 − 0,022 = 0,978. Ainsi, **$P(A_2 \mid \text{non D}) = 0{,}6825 \div 0{,}978 \approx 0{,}69785$**. On divise la probabilité conjointe par celle de la condition connue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **$P(A_2 \mid \text{non D}) \approx 0{,}698$**, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée T de bon fonctionnement suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T), puis interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est l'inverse du paramètre : **$E(T) = 1/\lambda$**. Avec λ = 0,001 par heure, on obtient **E(T) = 1/0,001 = 1 000 heures**. En moyenne, un tube fonctionne donc 1 000 heures avant de ne plus être en bon fonctionnement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **E(T) = 1 000 heures.**

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule fournie donne **$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$**. Une loi exponentielle étant continue, les probabilités pour T < 8 000 et T ≤ 8 000 sont identiques. On calcule **$1 - e^{-0{,}001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0{,}99966$**, puis on arrondit au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T < 8 000) ≈ 1,00 au centième.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser t est le complément de la probabilité de ne pas dépasser t : $\mathbf{P(T > t) = e^{-\lambda t}}$. Pour 10 000 heures, $\mathbf{P(T > 10\,000) = e^{-0{,}001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454}$. Arrondie au centième, cette probabilité est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T > 10 000) ≈ 0,00 au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Parmi les 1 000 rivets de l'échantillon, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes, donc **f = 975/1 000 = 0,975**. La proportion estimée de rivets conformes dans la production est ainsi de 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f = 0,975, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie pour un intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle de confiance de p centré sur f. Arrondir les bornes au millième.

La formule donnée utilise f = 0,975 et n = 1 000. La marge vaut **1,96√(0,975 × 0,025/1 000) ≈ 0,009677**. L'intervalle est donc **[0,975 − 0,009677 ; 0,975 + 0,009677]**, soit environ [0,965323 ; 0,984677]. L'arrondi au millième donne les bornes demandées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : [0,965 ; 0,985].

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, durée deux heures; coefficient 2 selon les spécialités, 3 en Traitement des matériaux. L'exercice 1 étudie le freinage d'un chariot par une fonction exponentielle; l'exercice 2 traite du contrôle de tubes fluorescents, de leur durée de vie et d'un intervalle de confiance. Les compétences évaluées couvrent analyse, calcul différentiel et intégral, probabilités et statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$.
- Si $f(t)$ tend vers une limite finie L en $+\infty$, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $E(T) = 1/\lambda$.
- L'intervalle de confiance fourni à 95 % est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution générale d'une équation différentielle de celle qui satisfait la condition initiale.
- Pour le tableau de variations, justifier le signe de la dérivée sur tout l'intervalle étudié.
- Pour une probabilité conditionnelle, placer au dénominateur la probabilité de l'événement imposé.
- Vérifier la cohérence entre les données et une probabilité demandée, puis respecter unités et arrondis.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la distance parcourue à partir de la vitesse du chariot ?

La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Si F est une primitive de f, elle vaut $F(t_1) - F(t_0)$. Le résultat est en mètres ici, puisque la vitesse est en mètres par seconde et le temps en secondes.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle dans l'exercice des ateliers ?

Pour calculer la probabilité que le tube provienne de l'atelier 2 sachant qu'il est sans défaut, divisez $P(A_2 \cap \bar{D})$ par $P(\bar{D})$. L'arbre pondéré permet d'obtenir la probabilité de l'intersection en multipliant les probabilités sur la branche correspondante.

Q : Comment gérer le temps et les points pendant cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Les parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Commencez par les questions accessibles, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quelles précautions prendre pour répondre selon les attentes de l'épreuve ?

Justifiez les résultats demandés, indiquez les unités des grandeurs physiques et respectez la précision indiquée. Pour le QCM sur le développement limité, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée. Vérifiez aussi la cohérence des données de probabilité.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btscpde.fr/assets/annales/bts-cpde/E2 - Mathématiques/2022/BTS CPDE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Conception des Processus de Découpe et d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.